**Этаж 1. Язык**

**Задание 1. Определение арифметического языка**

Необходимо дать определение указанного ниже арифметического языка. Для этого требуется выполнить следующие действия:

1. Ввести минимальный полный перечень букв.
2. Определить правила синтаксиса, т.е. указать, какие именно сочетания букв являются словами.
3. Определить правила семантики, т.е. указать интерпретацию слов и словосочетаний.
4. Привести пример истинного высказывания данного языка.
5. Привести пример ложного высказывания данного языка.

В качестве образца следует использовать язык простейшей арифметики из лекции (натуральные числа со сложением).

**Варианты:**

1. Отрицательные целые числа со сложением
2. Целые числа со сложением
3. Натуральные числа, кратные трем, со сложением
4. Рациональные числа с делением
5. Рациональные числа с умножением
6. Целые четные числа с вычитанием

**Задание 2. Множества**

**Примеры отношений и операторов**

Следует дать примеры указанных объектов, если они существуют.   
В ответе сначала приводится заявленный объект,   
а потом доказывается, что он обладает необходимыми свойствами.

Если объект не существует, то объяснить причину.

Примеры из лекции не засчитываются.

**Вариант 1**

1. Рефлексивное симметричное, но не транзитивное отношение.

2. Сюръекция из множества квадратов на множество отрезков.

**Вариант 2**

1. Оператор, не являющийся сюръекцией и инъекцией.

2. Рефлексивное несимметричное отношение эллипсов.

**Вариант 3**

1. Транзитивное отношение треугольников.

2. Сюръекция из множества квадратов на множество положительных чисел.

**Вариант 4**

1. Симметричное нетранзитивное отношение прямых.

2. Эквивалентность двух подмножеств множества комплексных чисел.

**Вариант 5**

1. Биекция между множествами людей и действительных чисел.

2. Рефлексивное транзитивное, но не симметричное отношение отрезков.

**Вариант 6**

1. Рефлексивное транзитивное отношение квадратов.

2. Инъекция из множества действительных чисел в множество отрезков.

**Задание 3. Мощности и числа**

Исследуются свойства мощностей, а также натуральных и целых чисел.

**Вариант 1**

**Определить мощность симметрической разности двух подмножеств множества натуральных чисел**: выбираются два подмножества натуральных чисел, находится их симметрическая разность, вычисляется ее мощность.

**Вариант 2**

**Доказать ассоциативность сложения целых чисел на основе ассоциативности сложения натуральных чисел**: используется определение сложения целых чисел на основе сложения натуральных чисел, предполагается известной ассоциативность сложения натуральных чисел, доказывается указанный результат.

**Вариант 3**

**Доказать, что аддитивное уравнение с целыми параметрами имеет целое решение**: используется определение сложения целых чисел, рассматривается аддитивное уравнение на множестве целых чисел, доказывается указанный результат.

**Вариант 4**

**Определить мощность множества всех нечетных чисел**: рассматривается множество всех нечетных натуральных чисел, оценивается его мощность на основе определения понятия мощности.

**Вариант 5**

**Доказать коммутативность сложения целых чисел на основе коммутативности сложения натуральных чисел**: используется определение сложения целых чисел на основе сложения натуральных чисел, предполагается известной коммутативность сложения натуральных чисел, доказывается указанный результат.

**Вариант 6**

**Определить мощность разности двух подмножеств множества целых чисел**: выбираются два подмножества целых чисел, находится их разность, вычисляется ее мощность.

**Варианты 2 и 5 заменить, поскольку такие задания будут в №4**

**Задание № 4. Числа**

Рассматриваются свойства различных числовых классов.

**Вариант 1**

1. Привести пример объекта, если он существует: сюръекция .

2. Доказать коммутативность сложения на Q, пользуясь этим свойством на Z.

**Вариант 2**

1. Привести пример объекта, если он существует: инъекция .

2. Определить транзитивное отношение на С.

**Вариант 3**

1. Привести пример объекта, если он существует: сюръекция .

2. Доказать коммутативность сложения на Z, пользуясь этим свойством на N.

**Вариант 4**

1. Привести пример объекта, если он существует: сюръекция .

2. Доказать коммутативность умножения на Z, пользуясь этим свойством на N.

**Вариант 5**

1. Привести пример объекта, если он существует: инъекция .

2. Доказать ассоциативность сложения на C, пользуясь этим свойством на R.

**Вариант 6**

1. Привести пример объекта, если он существует: инъекция .

2. Определить отношение эквивалентности на R.

**Задание 5. Порядковые объекты**

При выполнении работы использовать определения из лекции.

Ответ на каждый вопрос включает в себя три этапа:

1. Определить конкретное множество (оно может быть задано постановкой задачи или нет).

2. Определить конкретный предпорядок или частичный порядок для указанного множества.

3. Доказать того, что указанное в задании свойство выполнено для введенного порядкового объекта.

Примеры из лекции не засчитываются.

**Вариант 1**

Привести пример объектов:

1. Множество с наибольшим элементом без наименьшего элемента.

2. Предупорядоченное множество людей.

**Вариант 2**

Привести пример объектов:

1. Линейно упорядоченное нечисловое множество.

2. Множество, ограниченное снизу, но не сверху.

**Вариант 3**

Привести пример объектов:

1. Множество с двумя максимальными элементами.

2. Частично упорядоченное множество кругов. (заменить задание)

**Вариант 4**

Привести пример объектов:

1. Множество с двумя минимальными элементами.

2. Предупорядоченное множество квадратов.

**Вариант 5**

Привести пример объектов:

1. Линейно упорядоченное, но не вполне упорядоченное множество.  
2. Множество с тремя минимальными элементами.

**Задание 6. Группоиды**

Выполнение задания предполагает выполнение следующих действий.

1. Определить конкретное множество (оно может быть задано постановкой задачи или нет).

2. Определить конкретную операцию на данном множестве.

3. Доказать, что данное свойство верно для определенного алгебраического объекта

При выполнении работы следует использовать определения из последней лекции. Примеры из лекции не засчитываются.

**Вариант 1**

Определить некоммутативную полугруппу на множестве непрерывных функций.

**Вариант 2**

Определить коммутативный моноид, но не группу на множестве из двух элементов, не являющихся числами.

**Вариант 3**

Определить группоид, но не моноид на множестве из трех чисел.

**Вариант 4**

Определить коммутативный моноид, но не группу на множестве натуральных чисел.

**Вариант 5**

Определить некоммутативный моноид на множестве полиномов.

**Задание № 7. Векторные пространства**

При выполнении задания требуется привести пример объекты и доказать, что для него выполнены необходимые свойства.

**Вариант 1**

1. Линейный функционал на множестве интегрируемых функций.

2. Выпуклое множество комплексных чисел

**Вариант 2**

1. Векторное пространство на множестве полиномов.

2. Линейный функционал на трехмерном евклидовом пространстве.

**Вариант 3**

1. Линейный оператор из плоскости на множество непрерывных функций

2. Невыпуклое множество комплексных чисел.

**Вариант 4**

1. Линейный оператор из множества действительных чисел на множество полиномов

2. Подпространство пространства комплексных чисел

**Вариант 5**

1. Невыпуклое множество действительных чисел.

2. Линейный оператор из плоскости на трехмерное пространство.

**Задание 8. Топологические пространства**

Для любого задание требуется привести пример соответствующего объекта и доказать, что он обладает требуемыми свойствами. При выполнении работы используются определения из соответствующей лекции.

**Вариант 1**

1. Определить слабейшую топологию на множестве из трех точек. Перечислить все окрестности ее точек.
2. Определить топологическое подпространство множества действительных чисел, носитель которого не имеет мощность континуум.

**Вариант 2**

1. Определить сильнейшую топологию на множестве из трех точек. Перечислить все окрестности ее точек.
2. Определить два не гомеоморфных множества на числовой прямой.

**Вариант 3**

1. Определить не сильнейшую и не слабейшую топологию на множестве их трех точек. Перечислить ее открытые, замкнутые и прочие множества.
2. Определить два равномощных множества на прямой, одно из которых замкнуто, а второе – не замкнуто.

**Вариант 4**

1. Определить две гомеоморфные топологии на множестве из трех точек.
2. Определить два равномощных множества на прямой, одно из которых замкнуто, а второе – не замкнуто.

**Вариант 5**

1. Определить топологию на множестве из трех точек. Привести пример ее подпространства.
2. Привести пример двух негомеоморфных множеств на прямой.

**Задание 9. Метрические пространства**

Необходимо привести пример объекта и доказать, что он обладает указанными свойствами

**Вариант 1**

1. Определить две метрики на множестве X = {a,b}
2. Найти расстояние между двумя множества на числовой прямой

**Вариант 2**

1. Определить метрику на множестве концентрических окружностей.

2. Найти расстояние между двумя точками на плоскости по двум разным метрикам.

**Вариант 3**

1. Определить метрику на множестве X = {a,b,c}
2. Определить несвязное ограниченное множество на числовой прямой

**Вариант 4**

1. Определить метрику на множестве ограниченных функций
2. Определить метрику на множестве X = {a,b} и вычислить диаметр множества

**Вариант 5**

1. Определить метрику на множестве комплексных чисел
2. Привести пример неполного ограниченного подпространства числовой прямой

**Вариант 6**

1. Определить метрику на множестве дифференцируемых функций
2. Определить связное неограниченное множество на числовой прямой

**Задание 10. Измеримые пространства**

Для выполнения задания требуется привести соответствующий объект и доказать, что он действительно обладает нужными свойствами.

**Вариант 1**

1. Определить вероятностную меру на множестве из четырех абстрактных элементов (не точек, не чисел).

2. Определить меру Лебега для открытого несвязного множества на прямой.

**Вариант 2**

1. Определить σ-алгебру на множестве из четырех абстрактных элементов (не точек, не чисел).

2. Определить меру Лебега множества на прямой, которое не открыто и не замкнуто.

**Вариант 3**

1. Определить алгебру на множестве из трех абстрактных элементов (не точек, не чисел).

2. Определить меру Лебега для несвязного замкнутого множества на прямой.

**Вариант 4**

1. Определить кольцо на множестве из трех абстрактных элементов (не точек, не чисел).

2. Определить меру Лебега для полуоткрытого интервала.

**Вариант 5**

1. Определить измеримое пространство на множестве из четырех абстрактных элементов (не точек, не чисел), которое не является топологическим пространством.

2. Определить меру Лебега на прямой множества, являющегося объединением трех точек.

**Вариант 6**

1. Определить вероятностную меру на множестве из трех абстрактных элементов (не точек, не чисел).

2. Определить меру Лебега на прямой несвязного замкнутого множества.

**Задание 11. Интегрирование**

1. Доказать, что интеграл по области [*a*,*b*] относительно меры, являющейся суммой мер Дирака, сосредоточенных в точках *p*, *q*, *r*, является обобщенной функцией, т.е. линейным непрерывным функционалом на множестве бесконечно дифференцируемых функций.

2. Подсчитать интеграл от конкретной функции *f* по указанной мере.

**Таблица параметров**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вариант** | ***f*(*x*)** | ***a*** | ***b*** | ***p*** | ***q*** | ***r*** |
| **1** | *x*2+1 | -∞ | 5 | -1 | 0 | 3 |
| **2** | *x*3 | 2 | ∞ | -1 | 3 | 4 |
| **3** | 2sin*x* | -3 | +3 | -π | 0 | π/2 |
| **4** | -cos*x* | -π | 0 | -π/2 | π/4 | π/2 |
| **5** | 2*x* | 0 | 7 | -1 | 1 | 3 |
| **6** | sin2*x* | 0 | π | -π/4 | π/4 | 3π/4 |

**Задание 12. Обобщенное дифференцирование**

Найти первую и вторую обобщенные производные функции



на отрезке [-1,1] для следующих значений функций *a* и *b*:

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 

**Задание 12. Структуры**

Каждое задание предполагает определение структуры заданного математического объекта, используя конструкции соответствующей лекции и приведенные там примеры в качестве образца. Ответ включает в себя следующие этапы:

1. Базис структуры (носитель структуры)
2. Описание схемы (алгоритм построения)
3. Ступень шкалы
4. Аксиомы структуры
5. Определение структуры

На каждом этапе действие проводится в общем виде (произвольная структура указанного типа на произвольном носителе структуры, например, произвольная структура группоида на произвольном множестве), но иллюстрируется конкретным примером (конкретная структура указанного типа на конкретном носителе, например, сложение (конкретная структура группоида) на множестве натуральных чисел (на конкретном множестве).

**Вариант 1.** Моноид

**Вариант 2.** Коммутативный группоид

**Вариант 3.** Метрическое пространство

**Вариант 4.** Частично упорядоченное множество

**Вариант 5.** Связное топологическое пространство

**Вариант 6.** Коммутативная полугруппа

**Задание 14. КАТЕГОРИИ**

Задается конкретная категория. Необходимо выполнить следующие действия:

1. Определить объекты категории
2. Определить морфизмы категории
3. Привести пример двух различных объектов данной категории
4. Привести пример морфизма, связывающего выбранные объекты

**Варианты**

1. Категория коммутативных моноидов
2. Категория отделимых топологических пространств
3. Категория линейно упорядоченных множеств
4. Категория конечномерных векторных пространств
5. Категория группоидов с единицей
6. Категория метрических пространств

**Задание 15. Категории 2**

Требуется дать описание указанной категории. Необходимо при этом ответить на следующие вопросы

1. Что является объектами категории?
2. Что является морфизмами категории?
3. Что является изоморфизмами категории?
4. Что является подобъектами категории?
5. Что является произведением объектов категории?
6. Привести пример свойства категории.
7. Привести пример полной подкатегории указанной категории.
8. Привести пример неполной подкатегории указанной категории.

**Варианты**

1. Категория частично упорядоченных множеств
2. Категория полугрупп
3. Категория моноидов
4. Категория метрических пространств
5. Категория топологических пространств
6. Категория векторных пространств